Chapitre 5 : Étude des mouvements

Extrait programme Tspé

Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point	- Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. - Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse.
Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.	- Citer et exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.
Mouvement rectiligne uniformément accéléré. Mouvement circulaire uniforme	- Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme. - *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées des vecteurs vitesse et accélération.* - PYTHON : Représenter, à l'aide d'un langage de programmation, des vecteurs accélération d'un point lors d'un mouvement.

Pour réviser, les exercices corrigés p 289

- Sur la relativité du mouvement : n°1 et 2
- Sur le tracé des vecteurs vitesse : n°4

I- Les vecteurs de description du mouvement

1- *Le vecteur position*

Dans le repère d'espace $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère un point M est en mouvement.

Le vecteur position est défini par : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$.

x(t), y(t) et z(t) sont les coordonnées du vecteur position. Elles dépendent du temps et on les appelle aussi les équations horaires du mouvement.

À cet instant t, le mobile se trouve à une certaine distance de l'origine O du repère donnée par $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

On écrit également $\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

2- *Le vecteur vitesse*

En classe de 1ère, on approche le vecteur vitesse $\vec{v}_i$ en un point M_i par le vecteur vitesse moyenne entre deux points.

On utilise en classe de Terminale la méthode centrée : $\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1}-t_{i-1}}$.

Si, dans un référentiel donné, les dates t_{i+1} et t_{i-1} figurant dans l'expression précédente se rapprochent de plus en plus, on montre, en mathématiques, que la limite du vecteur vitesse $\vec{v}_i$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur vitesse du point M dépend du temps, c'est la dérivée du vecteur position : $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$

Ses caractéristiques sont :
- point d'application : point M où se trouve le mobile ponctuel à cet instant.
- direction : tangente en M à la trajectoire.
- sens : celui du mouvement.
- norme : longueur de $\vec{v}$ (grâce à une échelle donnée).

Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}$$

Avec $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$; $v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$; $v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$

La norme du vecteur v est donnée par la relation : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ et s'exprime en $m.s^{-1}$.

On écrit également $\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases}$

3- *Le vecteur accélération*

La notion d'accélération est liée à la variation du vecteur vitesse (voir 1ère spé). L'accélération s'exprime en $m.s^{-2}$.

Le vecteur accélération du point M est la dérivée du vecteur vitesse : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

Ses caractéristiques sont :
- point d'application : point M où se trouve le mobile ponctuel à cet instant.
- direction et sens : dirigé vers "l'intérieur" de la trajectoire. ($\vec{a}$ est centripète)
- norme : longueur de $\vec{a}$ (grâce à une échelle donnée)

Les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$:

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k}$$

Avec $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$; $a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}$; $a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt}$

On peut calculer la norme de $\vec{a}(t)$ par la relation $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$

On écrit également $\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$

Applications : Activité 1 p 290, n°22 p 304 (unités des grandeurs), n°23 p 304
Application en autonomie : n°36 p 306

4- *Détermination graphique des vecteurs vitesse*

Méthode pour tracer le vecteur vitesse au point M_i *(rappels)*
- Mesurer la distance $M_{i-1}M_{i+1}$ en m
- Faire le calcul de la norme de la vitesse : $v_i = \frac{M_{i-1}M_{i+1}}{2\,\tau}$
- Dessiner $\vec{v}_i$ tangent à la trajectoire au point M_i avec l'échelle des vitesses.

Méthode pour tracer le vecteur accélération au point M_i
- Construire les vecteurs vitesses $\vec{v}_{i+1}$et $\vec{v}_{i-1}$
- Reporter - $\vec{v}_{i-1}$ et $\vec{v}_{i+1}$ en M_i
- Construire le vecteur $\Delta\vec{v}_i = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}$ au point M_i par la méthode des parallélogrammes.
- Mesurer la norme Δv_i avec l'échelle des vitesses.
- Faire le calcul de la norme de l'accélération : $a_i = \frac{\Delta v_i}{2\tau}$
- Tracer $\vec{a}_i$ colinéaire à $\Delta\vec{v}_i$ avec l'échelle des accélérations.

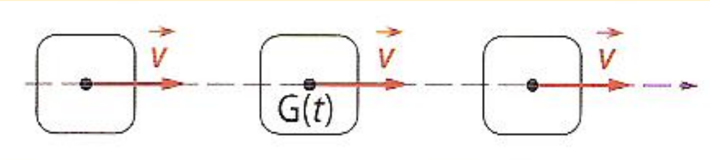
Activité : tracer des vecteurs vitesse et accélération

Application en autonomie : n°20 p 302 (corrigé détaillé – **Voir vidéo**)

II- Les mouvements rectilignes

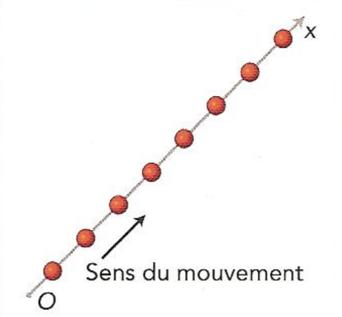
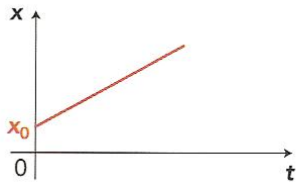
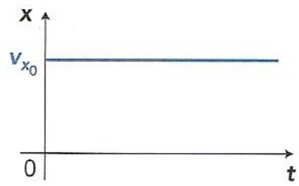
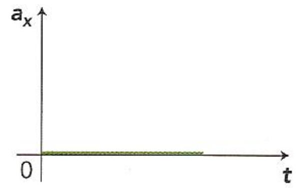
Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une ligne droite : la direction du vecteur $\vec{v}$ est constante.

1- *Mouvement rectiligne uniforme*



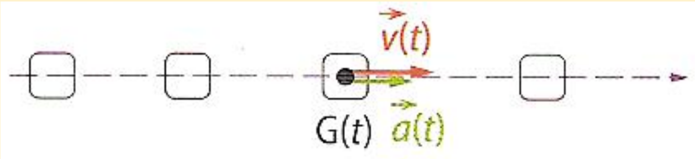
Pour un mouvement rectiligne uniforme, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est un vecteur constant (direction, sens et norme) : $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est nul : $\vec{a} = \vec{0}$

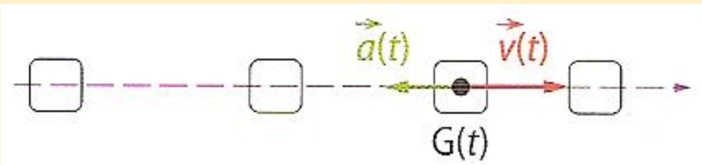
Chronophotographie d'un mouvement rectiligne uniforme sur un axe (Ox)	Représentation graphique de la coordonnée x de la position en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x de la vitesse en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x de l'accélération en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = v_{x_0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = v_{x_0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = 0$

2- *Mouvement rectiligne uniformément varié*

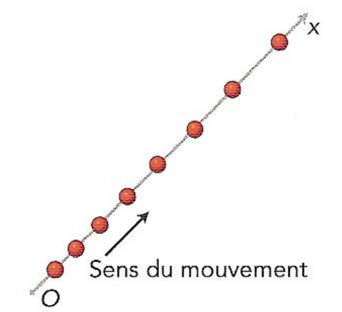
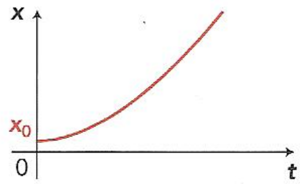
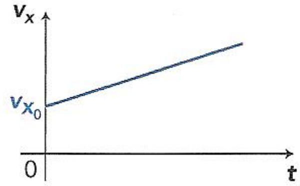
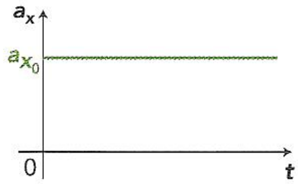
Dans un référentiel donné, un système a un mouvement rectiligne uniformément varié si son vecteur accélération est constant : $\vec{a} = \overrightarrow{cste}$



Mouvement uniformément accéléré ($\vec{a}$ et $\vec{v}$ de même sens)



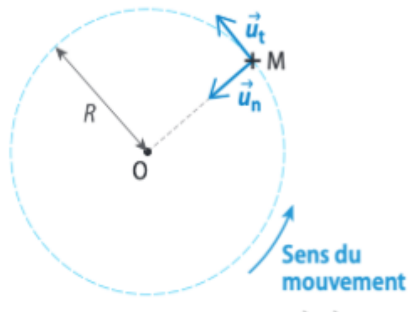
Mouvement uniformément ralenti ($\vec{a}$ et $\vec{v}$ de sens opposés)

Chronophotographie du mouvement	Représentation graphique de la coordonnée x en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{x_0} \cdot t^2 + v_{x_0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = a_{x_0} \cdot t + v_{x_0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = a_{x_0}$

Applications : n°24 p 304, n°30 p 305, n°31 p 305, n°37 p 306

III- Les mouvements circulaires

1- *La base de Frenet*



Pour les mouvements curvilignes ou circulaires, on utilise un repère lié au point M : le repère de Frenet. C'est un repère mobile, « qui tourne » en même temps que M. Il a pour origine le point mobile M à la date t et pour base $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$

- $\vec{u}_t$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement
- $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et dirigé vers le centre de la trajectoire.

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon R
Le vecteur position est donné par $\overrightarrow{OM}(t) = -R\,\vec{u}_n$
Le vecteur vitesse est donné par $\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{u}_t$
Le vecteur accélération par : $\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n = a_t(t)\,\vec{u}_t + a_n(t)\,\vec{u}_n$
a_t est appelée la composante tangentielle de l'accélération et a_n la composante normale de l'accélération.

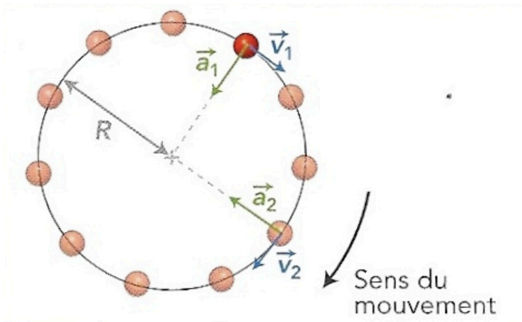
2- *Le mouvement circulaire uniforme*

Pour un mouvement circulaire uniforme, la norme de la vitesse est constante et la trajectoire est un cercle (ou une portion de cercle).
ATTENTION ! Le vecteur accélération $\vec{a}$ n'est pas nul car le vecteur vitesse n'est pas constant : il change de sens et de direction au cours du mouvement. Seule sa norme est constante.

Dans l'expression de l'accélération $\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n$

La valeur de la vitesse est constante donc : $\frac{dv(t)}{dt} = 0$

Il ne reste donc que $\vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n$ avec R le rayon de courbure.



Pour un mouvement circulaire uniforme : $\vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n$
Le vecteur accélération $\vec{a}$ est dirigé vers le centre de la trajectoire : il est centripète.
Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire : $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont donc perpendiculaires.

Applications : n°25 p 304 (oral), n°28 p 304 (représentations vecteurs $\vec{a}(t)$), n°35 p 306, n°38 p 306
Résolution de problème (en autonomie) : n°43 p 308 (corrigé : hatier-clic/pct308)