Chapitre 15 : Les circuits RC

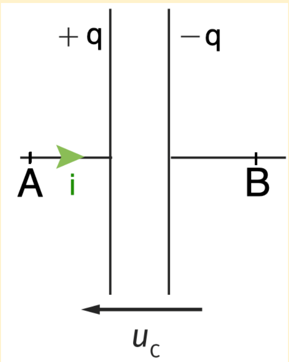
Extrait Programme Tspé

Intensité d'un courant électrique en régime variable Comportement capacitif Modèle du condensateur Relation entre charge et tension Capacité d'un condensateur Modèle du circuit RC série : Charge d'un condensateur par une source idéale de tension, décharge d'un condensateur, temps caractéristique. Capteurs capacitifs	- Relier l'intensité d'un courant électrique au débit de charges. - Identifier des situations variées où il y a accumulation de charges de signes opposés sur des surfaces en regard. - Citer des ordres de grandeur de valeurs de capacités usuelles. - *Identifier et tester le comportement capacitif d'un dipôle* - *Illustrer qualitativement, par exemple à l'aide d'un microcontrôleur, d'un multimètre ou d'une carte d'acquisition, l'effet de la géométrie d'un condensateur sur la valeur de sa capacité.* - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge. - Expliquer le principe de fonctionnement de quelques capteurs capacitifs. - *Étudier la réponse d'un dispositif modélisé par un circuit RC.* - *Déterminer le temps caractéristique d'un dipôle RC à l'aide d'un microcontrôleur, d'une carte d'acquisition ou d'un oscilloscope.*

I- <u>Le modèle du condensateur</u>

1- <u>L'effet capacitif</u>

Un condensateur est un dipôle électrique constitué de deux plaques conductrices très proches l'une de l'autre et séparées par un isolant.



Lorsqu'on alimente le dipôle avec un courant électrique, des charges de signes opposés s'accumulent sur les plaques : c'est l'effet capacitif.

Tant que le condensateur accumule les charges électriques sur ses plaques, un courant i circule dans le circuit, et la tension u_C aux bornes du condensateur augmente.

Lorsque le condensateur est chargé, aucun courant ne circule et la tension u_C devient constante : on dit que le condensateur stocke de l'énergie électrique.

Remarques :
- Le condensateur est électriquement neutre à chaque instant
- Le condensateur est un récepteur électrique : on utilise donc la convention récepteur : le courant est fléché dans le sens opposé de la tension à ses bornes.

2- *La capacité d'un condensateur*

L'aptitude d'un condensateur à accumuler une charge q (en Coulomb C) est caractérisée par sa capacité, qui s'exprime en Farad (F).

$$q(t) = C \times u_C(t)$$

La tension u_C s'exprime en Volt (V).

La capacité d'un condensateur varie de quelques nanofarads (nF) à quelques millifarads (mF).

https://phet.colorado.edu/sims/html/capacitor-lab-basics/latest/capacitor-lab-basics_all.html?locale=fr

La capacité d'un condensateur dépend de sa géométrie : elle augmente lorsque la surface S des armatures augmente et lorsque la distance d qui les sépare diminue. Elle dépend aussi de la nature de l'isolant entre les deux plaques (généralement de l'air).

Application en autonomie : n°27 p 554

3- *Lien entre tension et intensité électriques*

On a vu dans le chapitre sur les piles (C.14) que l'intensité est un débit de charges.
En courant continu, on a : $I = \frac{Q}{\Delta t}$

En régime variable, on définit le courant électrique comme la dérivée de la charge électrique par rapport au temps :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

L'intensité i est en Ampère (A), q en Coulomb (C) et t en seconde (s)

Remarque : En général, lorsque les grandeurs sont écrites en majuscules, cela correspond à du courant continu, et lorsqu'elles sont écrites en minuscules, cela correspond à un régime variable.

Application : n°26 p 554

Exprimons l'intensité en fonction de la tension u_C : $i(t) = \frac{dq}{dt}$ avec $q = C \times u_C(t)$
On a donc $i(t) = \frac{d(C \times u_C)}{dt} = \frac{dC}{dt} \times u_C + C \times \frac{du_C}{dt}$
La capacité d'un condensateur est une constante donc $\frac{dC}{dt} = 0$.

Un condensateur de capacité C, de tension à ses bornes u_C est traversé par un courant électrique i tel que :

$$i(t) = C \times \frac{du_C}{dt}$$

Avec i en Ampère (A), C en Farad (F), u_C en Volt (V).

Remarque : le terme « traversé » pour le courant est un peu abusif : des charges électriques s'accumulent sur une plaque et quittent l'autre. Cependant, aucune charge ne passe d'une plaque à l'autre à travers l'isolant situé entre elles.

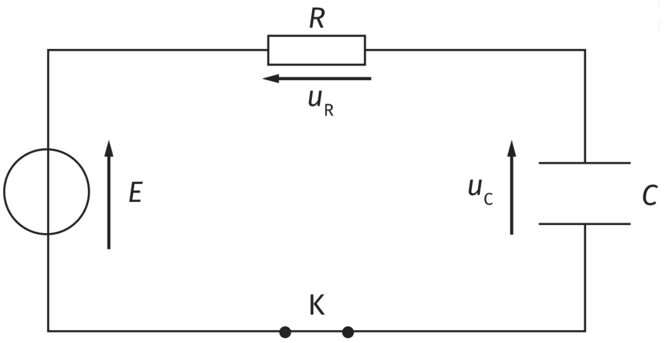
4- *Les capteurs capacitifs*

L'effet capacitif est utilisé dans de nombreux capteurs afin de mesurer différentes grandeurs physiques.
Le principe est de relier la modification de la distance entre les armatures ou de la nature de l'isolant à la grandeur voulue.
Voir manuel p 544 pour des exemples de capteurs capacitifs.

II- Charge du dipôle RC

1- *Circuit électrique et mise en équation*

Un condensateur de capacité C est monté en série avec un conducteur ohmique de résistance R et une source de tension E.
À t = 0, le condensateur est complétement déchargé, et on ferme l'interrupteur K.



On cherche à connaître l'évolution au cours du temps de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R et C.

Utilisons la loi des mailles : $E - u_R(t) - u_C(t) = 0 \rightarrow E = u_R(t) + u_C(t)$ équation (1)

Or d'après la loi d'Ohm, nous pouvons relier la tension aux bornes du conducteur ohmique à l'intensité électrique qui circule dans le circuit : $u_R(t) = R \times i(t)$ équation (2)

D'après le paragraphe précédent, l'intensité i est relié à la tension u_C par la relation : $i(t) = C \times \frac{du_C}{dt}$
Ainsi, on peut réécrire l'équation (2) : $u_R(t) = R \times C \times \frac{du_C}{dt}$

Finalement, on peut réécrire l'équation (1) : $E = R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C(t)$

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 régit l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur :

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{RC}=\frac{E}{RC}$$

2- *Résolution de l'équation différentielle*

La solution générale d'une équation différentielle d'ordre 1 est la somme d'une solution particulière u_{Cp} et de la solution générale de l'équation homogène $u_{Ch}(t)$:

$$u_c(t)=u_{Cp}+u_{Ch}\,(t)$$

Remarque : L'équation homogène est aussi appelée équation sans second membre.

Solution particulière de l'équation : u_{Cp}

La solution particulière est une constante. Il suffit de trouver une valeur de u_c qui est solution de l'équation différentielle pour trouver la solution particulière u_{Cp}.

La constante u_{Cp} = E est une solution de l'équation différentielle précédente.

En effet : $\frac{du_{Cp}}{dt}=\frac{dE}{dt}=0$ car E est une constante.
Ainsi, il reste $\frac{u_{Cp}}{RC}=\frac{E}{RC}$. On retrouve bien le membre de droite de l'égalité.

Solution générale de l'équation homogène : $u_{Ch}(t)$

L'équation homogène est : $\frac{du_{Ch}}{dt}+\frac{u_{Ch}}{RC}=0$
Mathématiquement, la solution générale d'une telle équation est $u_{Ch}(t)=A\times e^{-\frac{t}{RC}}$

A est une constante qui dépend des conditions initiales. Nous la déterminerons dans une prochaine étape.

Finalement, $u_C(t)=u_{Cp}+u_{Ch}(t)=\ E+A\times e^{-\frac{t}{RC}}$ équation (3)

Il ne reste qu'à trouver l'expression de A à partir des conditions initiales (comme dans le chapitre de mécanique C6) :
Remplaçons dans l'équation (3) t par 0 : $u_c(0)=E+A\times e^{-\frac{0}{RC}}=E+A$

Or on sait que le condensateur est complètement déchargé à t = 0 :

$$q(0)=C\times u_c(0)=0\rightarrow u_c(0)=0$$

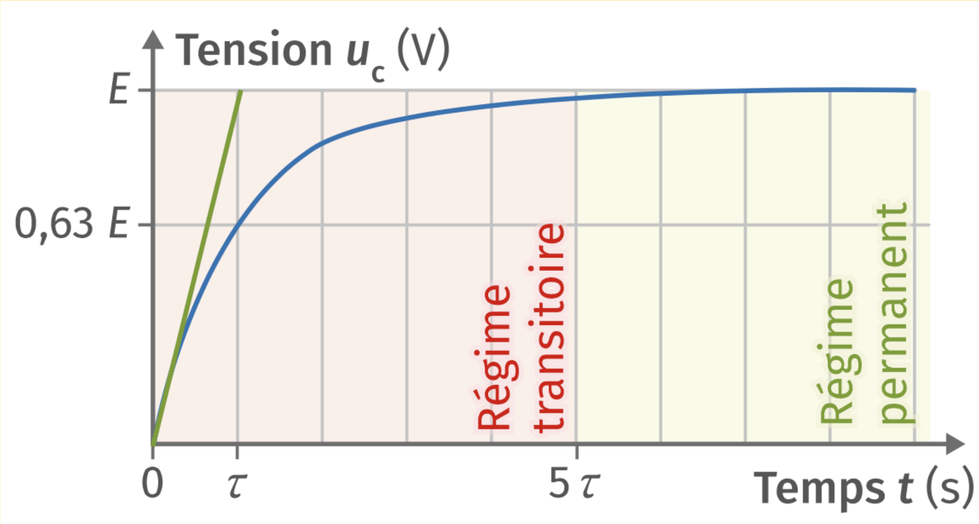
Ainsi $E+A=0\rightarrow A=\ -E$

Reprenons l'équation (3) : on a finalement $u_c(t)=E-E\times e^{-\frac{t}{RC}}$

L'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur lorsqu'il est en charge est :

$$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La courbe ci-dessous représente l'allure de la courbe correspondante.



Applications : n°31 p 554, n°35 p 555

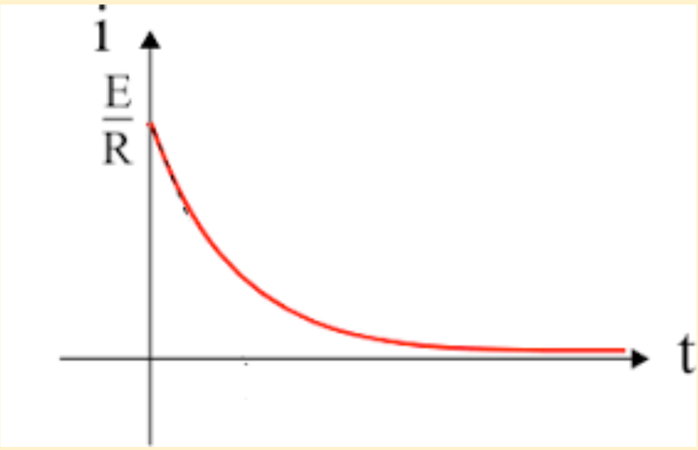
On peut aussi trouver l'expression de l'intensité $i(t)$ qui circule dans le circuit.
On sait que $i(t) = C \times \frac{du_C}{dt}$.
Remplaçons u_C par son expression trouvée dans l'encadré précédent : $u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$$\frac{du_C}{dt} = E \times -\left(-\frac{1}{RC}\right) \times e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{RC} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

On réinjecte cela dans l'expression de $i(t)$: $i(t) = C \times \frac{E}{RC} \times e^{-\frac{t}{RC}}$

L'intensité $i(t)$ est une fonction décroissante au cours du temps :

$$i(t) = \frac{E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$



Applications : n°36 p 555, n°40 p 556 (facultatif : continuité)

3- *Le temps caractéristique*

Dans l'équation différentielle ou dans l'expression de $u_c(t)$, on peut voir que le produit RC est homogène à un temps.

Le temps caractéristique (en s) s'exprime par la relation $\tau = R \times C$.
C'est un temps qui permet de prévoir la durée de la charge du condensateur : il est chargé au bout de $t = 5\,\tau$.

Il y a deux méthodes pour trouver la valeur de τ.

- *Méthode des 63 %* : Lorsque la durée τ s'est écoulée depuis le début de la charge, la tension $u_C(\tau)$ a atteint 63 % de sa valeur maximale.
En effet : $u_c(\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right) = E\left(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}\right) = E(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E$
Par lecture graphique, on peut donc repérer la valeur de τ.

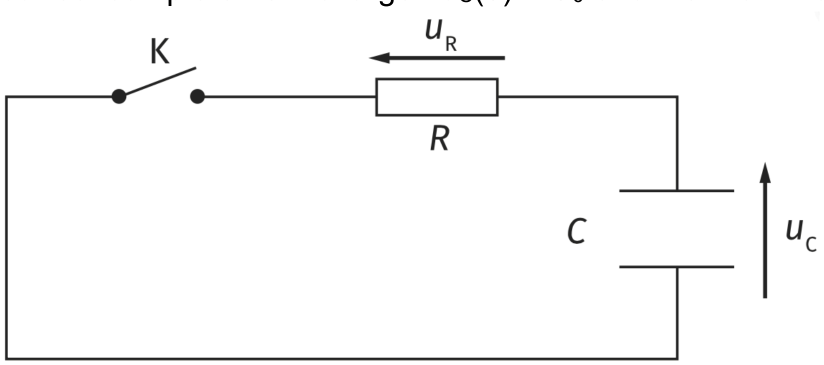
- *Méthode de la tangente à l'origine* : En traçant la tangente à l'origine de $u_c(t)$, on peut retrouver la valeur de τ. En effet, τ correspond à l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et la droite u_C = E.

Applications en autonomie : n°29 p 554 (sans calc.), n°22 p 551 (corrigé détaillé)

III- Décharge du dipôle RC

1- *Circuit électrique et mise en équation*

Un condensateur de capacité C est monté en série avec un conducteur ohmique de résistance R et un interrupteur ouvert.
À t = 0, le condensateur est complétement chargé : $u_C(0) = U_0$ et on ferme l'interrupteur K.



On cherche à connaître l'évolution au cours du temps de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

Utilisons la loi des mailles : $u_R + u_C = 0$
Or d'après la loi d'Ohm, nous pouvons relier la tension aux bornes du conducteur ohmique à l'intensité électrique qui circule dans le circuit : $u_R = R \times i$
D'après le paragraphe I, l'intensité i est relié à la tension u_C par la relation : $i = C \times \frac{du_C}{dt}$

De la même façon que dans le paragraphe II, on peut donc écrire : $R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 régit l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur lors de sa décharge :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$$

2- *Résolution de l'équation différentielle*

L'équation différentielle est une équation homogène (équation sans second membre).

Mathématiquement, la solution générale d'une telle équation est $u_c(t) = A \times e^{-\frac{t}{RC}}$
A est une constante qui dépend des conditions initiales.

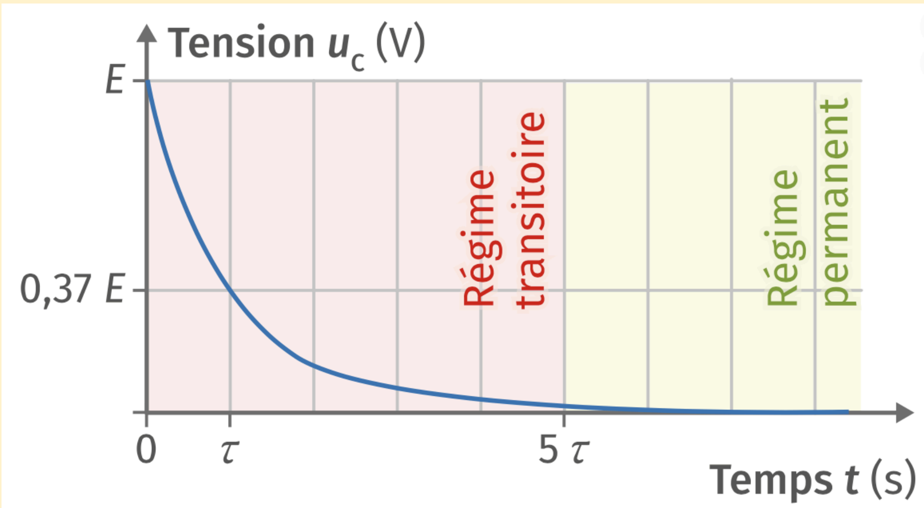
À t = 0, $u_c(0) = A \times e^{-\frac{0}{RC}} = A$
Or on sait que le condensateur est complètement chargé à t = 0 et $u_c(0) = U_0$
Ainsi $A = U_0$

On a finalement $u_c(t) = U_0 \times e^{-\frac{t}{RC}}$

L'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur lorsqu'il se décharge est :

$$u_c(t) = U_0 \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

La courbe ci-dessous représente l'allure de la courbe correspondante.



Remarque : Le temps caractéristique $\tau = R \times C$ est le même que lors de la charge du condensateur.

Applications : n°34 p 554, n°42 p 556

Applications en autonomie : n°23 p 552 (corrigé détaillé), n°52 p 560 (résolution de problème)

Exercices type bac : n°53 p 561, n°54 p 562

Pour l'aspect mathématique des équations différentielles : voir manuel p 28 à 31

Mémo sur la concordance maths / PC :

Notation générale	Notation ici
Équation différentielle	
$y' = ay + b$	$\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{RC} + \frac{E}{RC}$
Fonction et variable	
$y(x)$	$u_C(t)$
Paramètres	
a	$-\frac{1}{RC}$
b	$\frac{E}{RC}$
Solution générale de l'équation homogène	
$y_h(x) = Ae^{ax}$	$u_{Ch}(t) = Ae^{-t/RC}$
Solution particulière	
$y_p = -\frac{b}{a}$	$u_{Cp}(t) = E$
Solution générale de l'équation	
$y(x) = Ae^{ax} - \frac{b}{a}$	$u_C(t) = Ae^{-t/RC} + E$