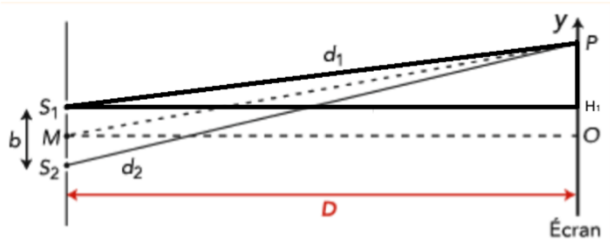
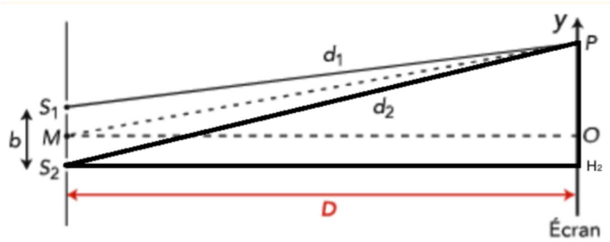
Devoir Maison n°4 : Correction

Exercice n°1 :

1. $\delta = d_2 - d_1$.
   Il faut donc exprimer d_1 et d_2 en fonction des données. Pour cela, nous allons utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles S_1H_1P et S_2H_2P





– Calcul de d_1 :
Dans le triangle rectangle S_1H_1P, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
S_1H_1^2 + H_1P^2 &= S_1P^2 \\
D^2 + (OP - OH_1)^2 &= d_1^2 \\
D^2 + (y_p - OS_1)^2 &= d_1^2 \\
D^2 + (y_p - \frac{b}{2})^2 &= d_1^2 \\
d_1 &= \sqrt{D^2 + (y_p - \frac{b}{2})^2}
\end{aligned}$$

– Calcul de d_2 :
Dans le triangle rectangle S_2H_2P, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
S_2H_2^2 + H_2P^2 &= S_2P^2 \\
D^2 + (H_2O + OP)^2 &= d_2^2 \\
D^2 + (S_2O + y_p)^2 &= d_2^2 \\
D^2 + (\frac{b}{2} + y_p)^2 &= d_2^2 \\
d_2 &= \sqrt{D^2 + (\frac{b}{2} + y_p)^2}
\end{aligned}$$

– Calcul de δ
On a finalement $\delta = d_2 - d_1$ soit $\delta = \sqrt{D^2 + (\frac{b}{2} + y_p)^2} - \sqrt{D^2 + (y_p - \frac{b}{2})^2}$

2. On a donc, par factorisation par D :

$$\begin{aligned}
\delta &= \sqrt{D^2 + (\frac{b}{2} + y_p)^2} - \sqrt{D^2 + (y_p - \frac{b}{2})^2} \\
\delta &= \sqrt{D^2\left(1 + \frac{(\frac{b}{2} + y_p)^2}{D^2}\right)} - \sqrt{D^2\left(1 + \frac{(y_p - \frac{b}{2})^2}{D^2}\right)} \\
\delta &= D\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{b}{2} + y_p}{D}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_p - \frac{b}{2}}{D}\right)^2}\right) \\
\delta &= D(\sqrt{1 + \epsilon^2} - \sqrt{1 - \epsilon'^2})
\end{aligned}$$

avec $\epsilon = \dfrac{\frac{b}{2} + y_p}{D}$ et $\epsilon' = \dfrac{y_p - \frac{b}{2}}{D}$

On peut également écrire : $\epsilon = \dfrac{b}{2D} + \dfrac{y_p}{D}$ et $\epsilon' = \dfrac{y_p}{D} - \dfrac{b}{2D}$

D'après l'énoncé, on sait que $D >> b$ et $D >> y_p$.
Ainsi, d'une part $\frac{b}{D} << 1$ donc $\frac{b}{2D} << 1$; mais aussi $\frac{y_p}{D} << 1$
Finalement, on a bien $\epsilon << 1$ et $\epsilon' << 1$

3. En utilisant l'approximation donnée dans l'énoncé, on a :
$\sqrt{1+\epsilon^2} = 1 + \frac{\epsilon^2}{2}$
$\sqrt{1-\epsilon'^2} = 1 + \frac{(-\epsilon')^2}{2} = 1 + \frac{\epsilon'^2}{2}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\delta &= D(\sqrt{1+\epsilon^2} - \sqrt{1-\epsilon'^2}) \\
\delta &= D\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} - (1 + \frac{\epsilon'^2}{2})\right) \\
\delta &= D(1 + \frac{\epsilon^2}{2} - 1 - \frac{\epsilon'^2}{2}) \\
\delta &= D(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon'^2}{2}) \\
\delta &= D\left(\frac{\left(\frac{\frac{b}{2} + y_p}{D}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{y_p - \frac{b}{2}}{D}\right)^2}{2}\right) \\
\delta &= D\left(\frac{(\frac{b}{2} + y_p)^2}{2D^2} - \frac{(y_p - \frac{b}{2})^2}{2D^2}\right) \\
\delta &= \frac{1}{2D}\left((\frac{b}{2} + y_p)^2 - (y_p - \frac{b}{2})^2\right) \\
\delta &= \frac{1}{2D}\left((\frac{b}{2})^2 + y_p^2 + 2y_p\frac{b}{2} - \left(y_p^2 + (\frac{b}{2})^2 - 2y_p\frac{b}{2}\right)\right) \\
\delta &= \frac{1}{2D}\left((\frac{b}{2})^2 + y_p^2 + y_p b - y_p^2 - (\frac{b}{2})^2 + y_p b\right) \\
\delta &= \frac{1}{2D}2y_p b \\
\delta &= \frac{y_p b}{D}
\end{aligned}$$

Exercice n°2 :

La température est donnée dans le document 3. Si on isole cette formule, on a :

$$V = \sqrt{\frac{R \times \gamma \times T}{M}} \rightarrow V^2 = \frac{R \times \gamma \times T}{M} \rightarrow V^2 \times M = R \times \gamma \times T \rightarrow T = \frac{V^2 \times M}{R \times \gamma}$$

Étape 1 : Formule de la température

Pour connaître la température, on a besoin de la vitesse V, de la masse molaire M, de R et de γ

R est une constante, γ aussi.

Il manque la valeur de la masse molaire M et de la vitesse V.

Étape 2 : Masse molaire

Pour la masse molaire M, on va utiliser les documents 3 et 4.

Le mélange étudié est l'air. $M(air) = 79\%\ M(N_2) + 21\% M(O_2) = 0{,}79 \times 14 \times 2 + 0{,}21 \times 16 \times 2$

$$M(air) = 28{,}84\ g.mol^{-1}$$

Attention ! la masse molaire doit être en $kg.mol^{-1}$!

$$M(air) = 2{,}884\ .10^{-2} kg.mol^{-1}$$

Étape 3 : Vitesse

Pour la valeur de la vitesse V, on utilise les document 1 et 2.

On a $V = \frac{d}{\Delta t}$

Avec d la distance entre les deux récepteurs (doc 1) : $d = 64 - 14 = 50\ cm$

Et Δt qui se lit sur le doc.2 : $\Delta t = 7{,}5\ divisions = 7{,}5\ \times 0{,}2 = 1{,}5\ ms$

Finalement $V = \frac{d}{\Delta t} = \frac{0{,}50}{1{,}5.10^{-3}} = 333\ m.s^{-1}$

Étape 4 : Calcul de la température

On a donc : $T = \frac{V^2 \times M}{R \times \gamma} = \frac{333^2 \times 2{,}884.10^{-2}}{8{,}314 \times 1{,}4} = 274{,}75\ K$

Convertissons en degrés :

$\theta = T - 273{,}15 = 1{,}6\ °C$