DM n°6 : Mécanique – Correction

Q1. 2e loi de Newton : la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.
Système : {le bâton} de masse *m*
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Le bâton n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$.
$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m \cdot \vec{a}$ soit $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$.
En projection selon les axes (Ox) et (Oy) du repère choisi il vient :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_y(t) = g_y = -g \end{cases}$$

Q2. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc $a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt}$ et $a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt}$

Ainsi en primitivant on obtient $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_y(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$: $\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0.cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0.sin(\alpha) \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ on a :

$v_0.cos(\alpha) = Cte_1$
$v_0.sin(\alpha) = 0 + Cte_2$

Finalement : $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0.cos(\alpha) \\ v_y(t) = -g.t + v_0.sin(\alpha) \end{cases}$

Q3. À chaque instant $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ et $v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$

En primitivant on obtient $\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = v_0.cos(\alpha).t + Cte_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0.sin(\alpha).t + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à $t = 0$ s, le bâton est au point G($t = 0$) de coordonnées ($x(0) = 0$; $y(0) = h$) donc :

$0 + Cte_3 = 0$
$0 + 0 + Cte_4 = h$

Finalement, on obtient les équations horaires $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.cos(\alpha).t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0.sin(\alpha).t + h \end{cases}$

Q4. $t = \dfrac{x(t)}{v_0.cos(\alpha)}$

$$y(x) = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.cos(\alpha)}\right)^2 + v_0.sin\,\alpha.\frac{x}{v_0.cos(\alpha)} + h$$

$$y(x) = -\frac{g}{2.{v_0}^2.cos^2(\alpha)}.x^2 + x.tan(\alpha) + h$$

$$y(x) = -\frac{9,8}{2 \times 4,9^2 \times cos^2(30°)}.x^2 + x.tan(30°) + 0,70$$

$y(x) = -0,27\ x^2 + 0,58\ x + 0,70$

Q5. Pour gagner le joueur doit faire tomber la quille 9 située à 3,0 m au niveau du sol.
Déterminons l'altitude y du centre d'inertie G du bâton pour cette distance x de 3,0 m.
$y(3,0) = -0,27 \times 3,0^2 + 0,58 \times 3,0 + 0,70 = 1,0 \times 10^{-2}$ m = 1,0 cm.

Le bâton en étant à 1,0 cm du sol va bien renverser la quille 9 et permettre de remporter la partie.

Q6. La ligne 18 donne la formule pour calculer l'énergie cinétique.
Or $E_C = 0,5 \cdot m \cdot v^2$
On en déduit que m = 0,4 kg.

Q7. Em = Ec + Ep

Q8. Au début du lancer, le bâton monte et perd de la vitesse.
Ep = $m \cdot g \cdot y$ avec y qui augmente donc Ep augmente : Courbe A
$E_C = 0,5 \cdot m \cdot v^2$ avec v qui diminue donc E_C diminue : Courbe B
$E_m = E_c + E_p$: courbe C

Q9. La chute s'arrête lorsque le bâton touche le sol, alors E_P = 0 J.
Par lecture graphique, cela se produit pour t = 0,7 s.
La durée du vol est de 0,7 s.

$x(0,7) = 4,9 \times cos(30°) \times 0,7 = 3,0$ m
Au bout de 0,7 s, le bâton a bien parcouru 3,0 m et il atteint la quille n°9.